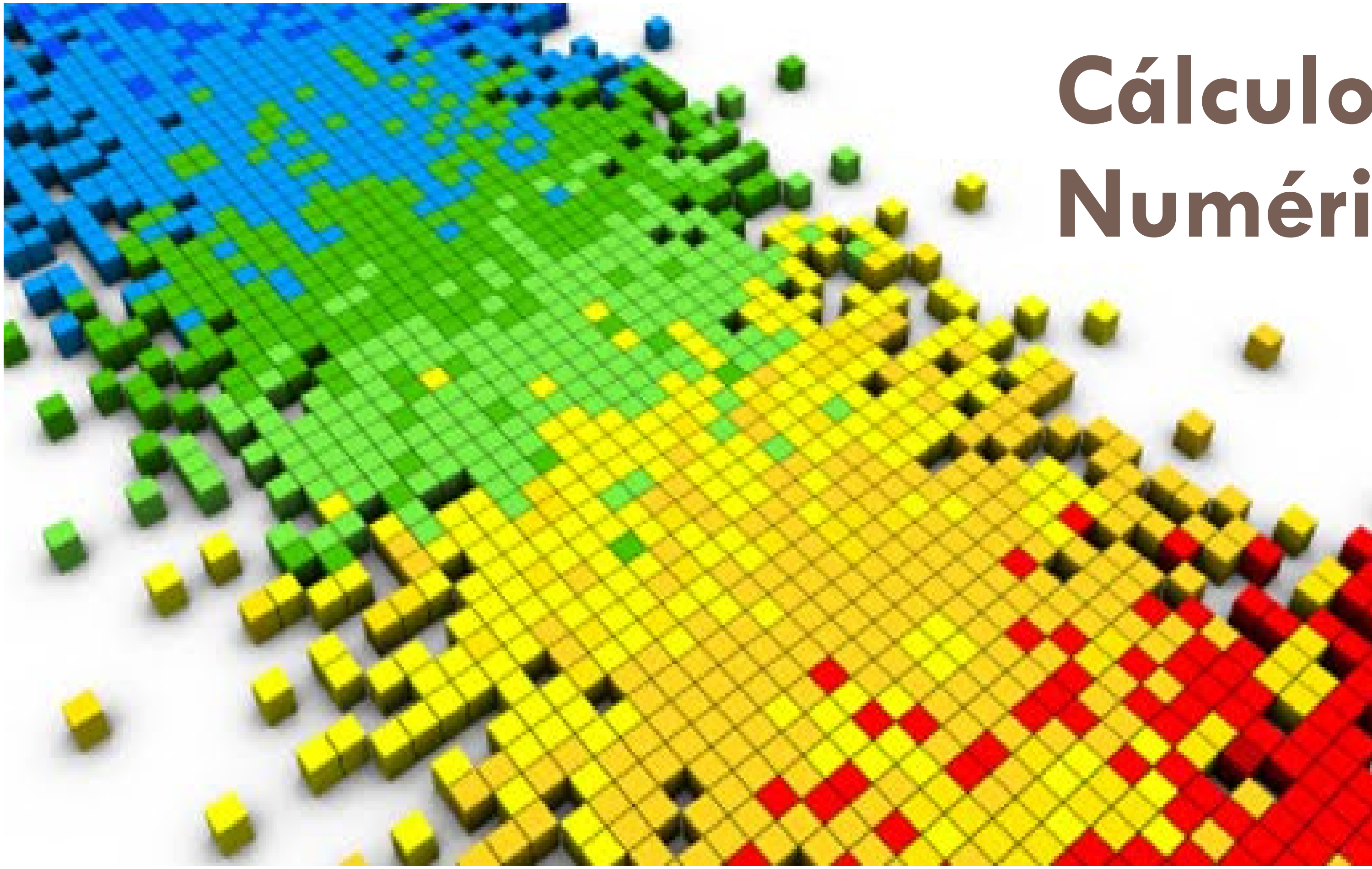


Cálculo Numérico

Aula 5 – Método Iterativo Linear e Newton-Raphson

2014.1 - 15/04/2014

Prof. Rafael mesquita

rgm@cin.ufpe.br

Adpt. por Prof. Guilherme Amorim

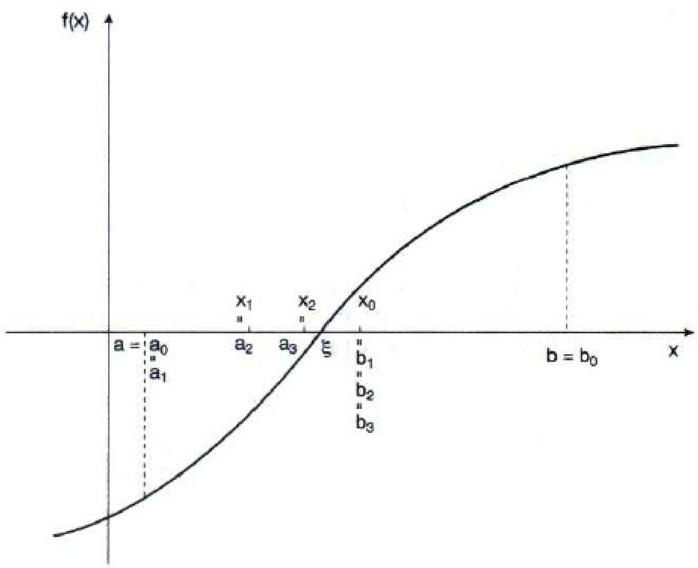
gbca@cin.ufpe.br

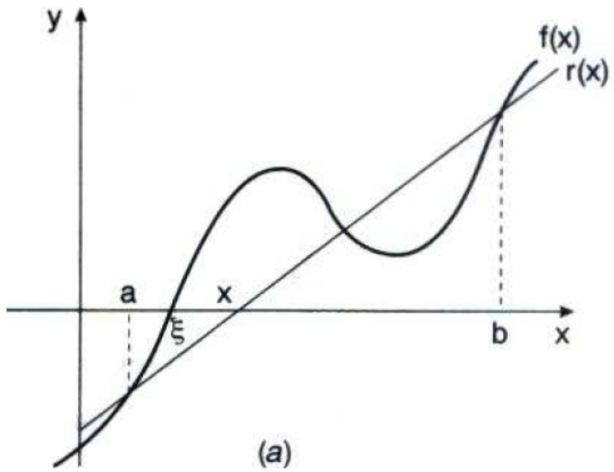
UFPE

Centro de Informática U·F·P·E

O que vimos até agora?

- Zeros de função:
  - Bisseção
  - Falsas cordas





E hoje...

- Os métodos vistos até agora (Bisseção e Falsas cordas) são chamados de métodos de quebra.
- Vamos estudar mais dois métodos para encontrar zeros de função.
- Hoje, entraremos nos métodos de ponto fixo.

Método Iterativo Linear

- Idéia básica (métodos de ponto fixo)
  - **Transformar o problema de encontrar uma raíz da equação**
    - **f(x) = 0** $\quad\quad (I)$
  - **No problema de resolver a equação**
    - $\varphi(x) = x \quad\quad (II)$
      - **que deve possuir as mesmas soluções que a anterior**
  - φ **-> máquina geradora da sequência** $\{x_i\}$ **de aproximações da raíz procurada**
  - **Temos o seguinte processo iterativo:**
    - $x_{i+1} = \varphi(\mathrm{x_i}), \mathrm{i} = 0, 1, 2 \ldots$

Método Iterativo Linear

- Transformando $(\boldsymbol{I})$ em $(\boldsymbol{II})$, ambas com as mesmas soluções
  - Objetivo: provar que $f(\varepsilon) = 0 \leftrightarrow \boldsymbol{\varphi}(\varepsilon) = \varepsilon$
  - Consideramos a máquina geradora como:
    - $\boldsymbol{\varphi}(x) = x + a.f(x), a \in R^*$

1. $(\boldsymbol{I}) \rightarrow (\boldsymbol{II})$
   - Caso ε seja solução de f(x)=0 temos que $\boldsymbol{\varphi}(\varepsilon) = \varepsilon$
   - Prova:
   - $\boldsymbol{\varphi}(\varepsilon) = \varepsilon + a\ f(\varepsilon)$
     - Como ε é solução de $f(x) = 0$
   - $\boldsymbol{\varphi}(\varepsilon) = \varepsilon + a \times 0$
   - Assim, temos que $\boldsymbol{\varphi}(\varepsilon) = \varepsilon$

Método Iterativo Linear

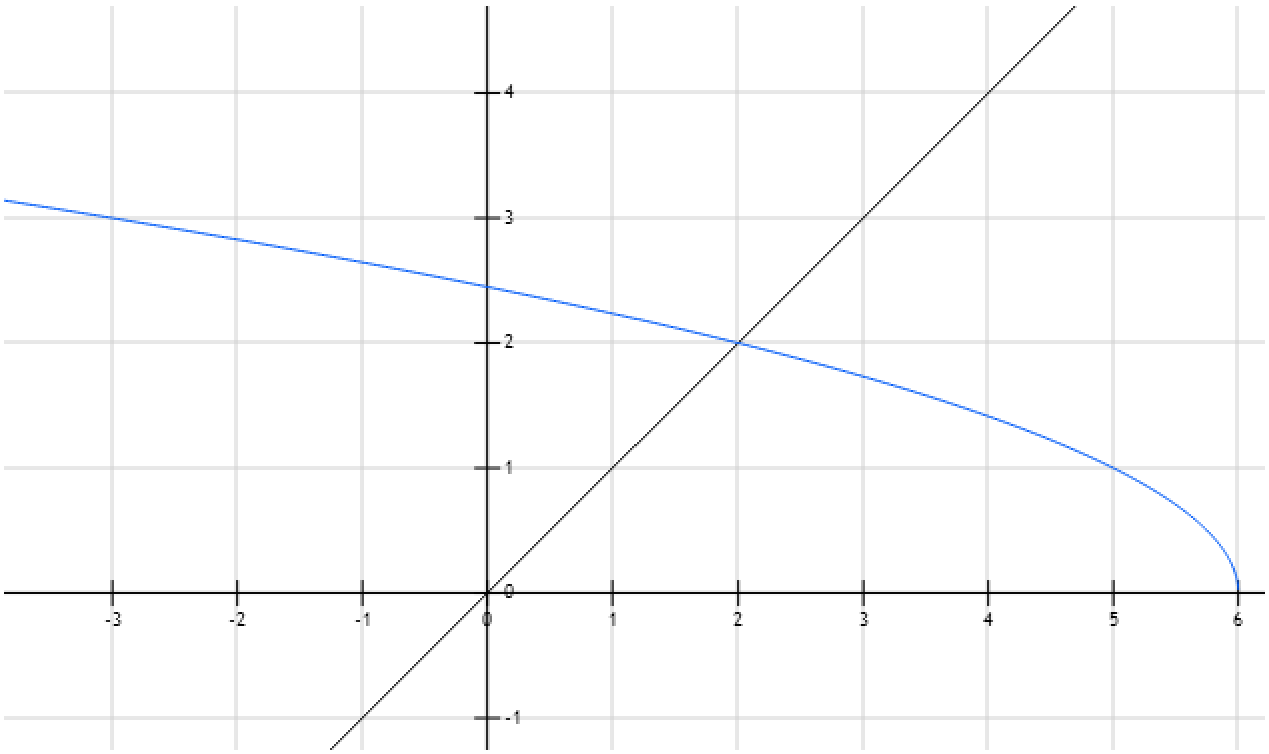
- Transformando $(\boldsymbol{I})$ em $(\boldsymbol{II})$, ambas com as mesmas soluções
  - Objetivo: provar que $f(\varepsilon) = 0 \leftrightarrow \boldsymbol{\varphi}(\varepsilon) = \varepsilon$
  - Consideramos a máquina geradora como:
    - $\boldsymbol{\varphi}(x) = x + a.f(x), a \in R^*$

2. $(\boldsymbol{II}) \rightarrow (\boldsymbol{I})$
   - Caso ε' seja solução de $\boldsymbol{\varphi}(\varepsilon') = \varepsilon'$, obrigatoriamente teremos que $f(\varepsilon') = 0$
   - Prova:
   - $\boldsymbol{\varphi}(\varepsilon') = \varepsilon'$
     - $\boldsymbol{\varphi}(\varepsilon') = \varepsilon' + af(\varepsilon') \Rightarrow af(\varepsilon') = 0$
   - Como por definição $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$
     - $f(\varepsilon') = 0$

Exemplo 1

- Considerando a equação $\boldsymbol{f(x) = x^2 + x - 6}$
- Se fizermos:
  - $\boldsymbol{x}^2 = 6 - \boldsymbol{x}$
  - Teremos que $\boldsymbol{x} = \sqrt{6 - x}$
  - Logo, $\boldsymbol{\varphi}(x) = \sqrt{6 - x}$
  - Ou seja, temos duas funções (1) $y = x$ e (2) $y = \boldsymbol{\varphi}(x)$
  - Onde (1) e (2) se encontram é a solução f(x)=0

Exemplo 1



Exemplo 1

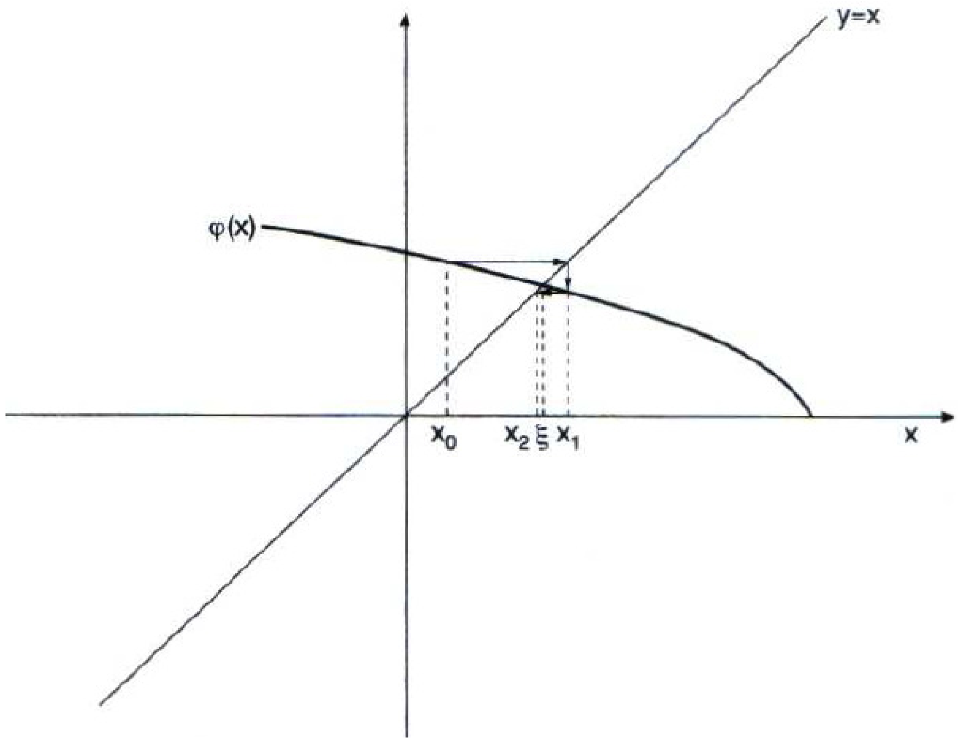
- **Ex: Considerando ainda a equação $x^2 + x - 6$ (que possui -3 e 2 como raízes), vemos abaixo a aplicação da máquina geradora $\varphi(x) = \sqrt{6 - x}$, tomando $x_0 = 1.5$:**

$$x_1 = \varphi(x_0) = \sqrt{6 - 1.5} = 2.12132$$
$$x_2 = \varphi(x_1) = 1.96944$$
$$x_3 = \varphi(x_2) = 2.00763$$
$$x_4 = \varphi(x_3) = 1.99809$$
$$x_5 = \varphi(x_4) = 2.00048$$

- **Nesse caso, $\{x_k\}$ está convergindo para a raiz $\varepsilon = 2$**

OK.. Mas como resolver o problema?

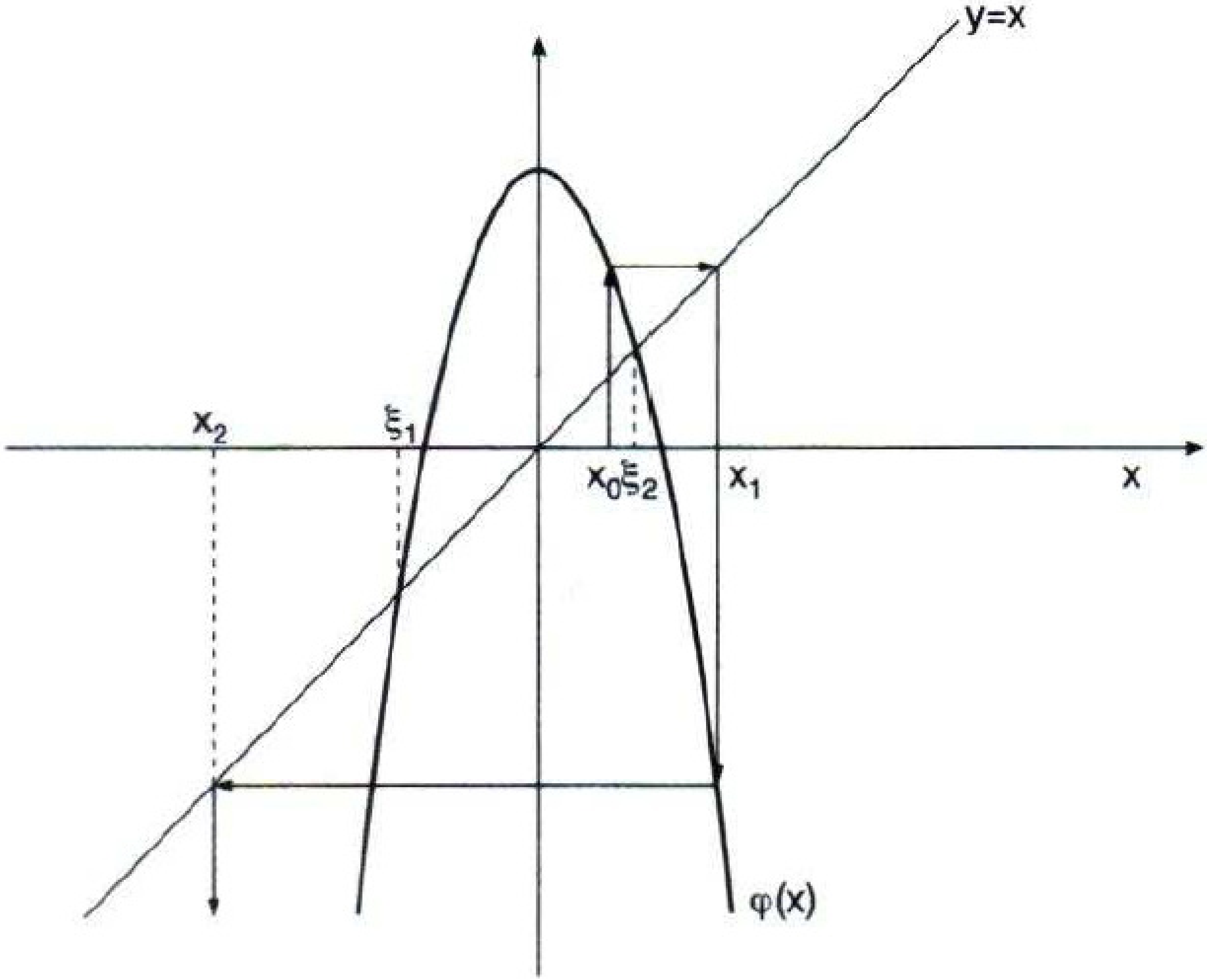
- $x_{i+1} = \varphi(\mathrm{x_i}), \mathrm{i} = 0, 1, 2 \ldots$



Exemplo 2
E se tivéssemos considerado...

- $\boldsymbol{f(x) = x^2 + x - 6}$
- $\boldsymbol{x = 6 - x^2} \rightarrow$
  - $\boldsymbol{\varphi}(x) = 6 - x^2$

Exemplo 2



Exemplo 2

- **Ex: Considerando a equação $x^2 + x - 6$ (que possui -3 e 2 como raízes), vemos abaixo a aplicação da máquina geradora $\varphi(x) = 6 - x^2$, tomando $x_0 = 1.5$:**

$$x_1 = \varphi(x_0) = 6 - 1.5^2 = 3.75$$
$$x_2 = \varphi(x_1) = 6 - (3.75)^2 = -8.0625$$
$$x_3 = \varphi(x_2) = 6 - (-8.0625)^2 = -59.003906$$
$$x_4 = \varphi(x_3) = -(-59.003906)^2 + 6 = -3475.4609$$

- **Como podemos observar, $\{x_k\}$ não está convergindo para a raiz $\varepsilon = 2$**

Método Iterativo Linear

- Convergência
  - Uma função de iteração deve satisfazer a condição $f(\varepsilon) = 0 \leftrightarrow \boldsymbol{\varphi}(\varepsilon) = \varepsilon$
  - Dada uma equação $f(x) = 0$ podemos definir diversas funções de iteração
    - Nem todas elas serão úteis
    - Existem certas condições para garantir a convergência com uma certa função de iteração

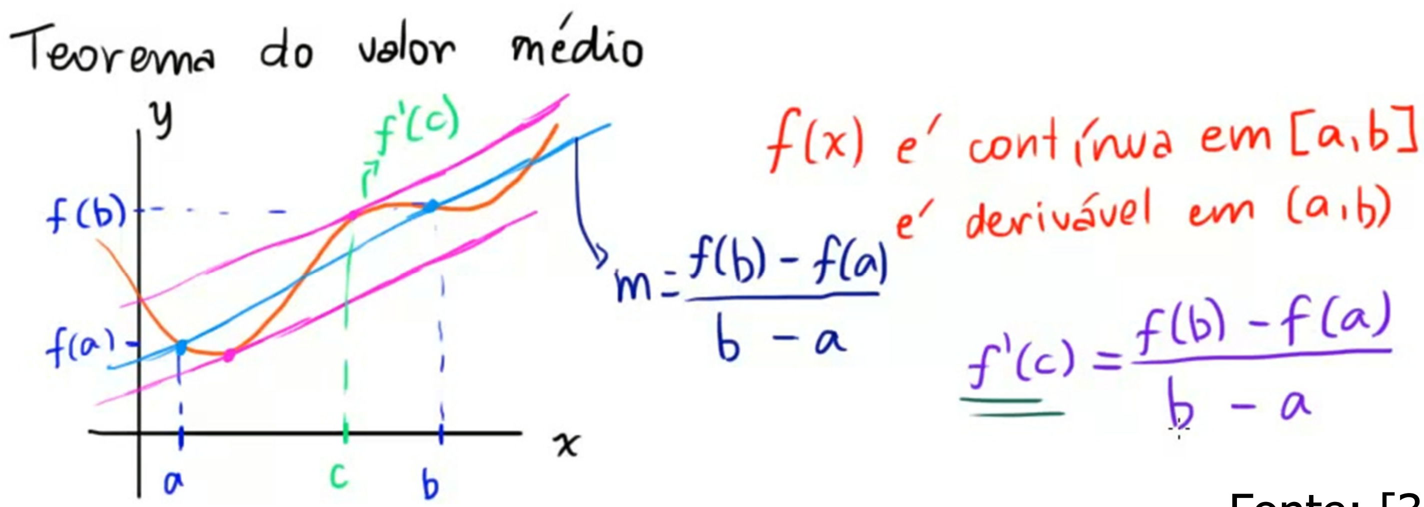
Método Iterativo Linear

- Convergência
  - **Critérios de convergência:**
  - **Seja ε um zero real da função f, I um intervalo de separação de ε centrado em ε e φ uma função de iteração para $f(x) = 0$**
  - **Se**

1. **$\boldsymbol{\varphi}$ e $\boldsymbol{\varphi}'$ forem contínuas em $\mathbf{I}$**
2. $|\boldsymbol{\varphi}'(\mathbf{x})| \leq \mathbf{k} < \mathbf{1}, \forall \mathbf{x} \in \mathbf{I}$
3. $\mathbf{x_0} \in \mathbf{I}$

- **Então a sequência $\{x_i\}$ gerada por $x_{i+1} = \varphi(x_i), i = 0, 1, \ldots$ converge para ε**

Revisão: Teorema do Valor Médio



Fonte: [3]

- Existe pelo menos um ponto entre a e b em que a derivada no ponto será igual à inclinação da reta que liga (a, f(a)) a (b, f(b)).

Prova...

Parte 1 $\quad x_i \in I \ \forall i$

a) $x_0 \in I$ por hipótese

b) $x_{i+1} - \varepsilon = \varphi(x_i) - \varphi(\varepsilon)$

pelo teorema do valor médio:

$$\varphi'(\beta) = \frac{\varphi(x_i) - \varphi(\varepsilon)}{x_i - \varepsilon}$$

logo $\varphi(x_i) - \varphi(\varepsilon) = \varphi'(\beta)\,(x_i - \varepsilon)$

$\Rightarrow |x_{i+1} - \varepsilon| = |\varphi'(\beta)| . |x_i - \varepsilon|$

$\Rightarrow |x_{i+1} - \varepsilon| \leq K\,|x_i - \varepsilon|$ (por ii)

$\Rightarrow |x_{i+1} - \varepsilon| < |x_i - \varepsilon|$ (por $K < 1$)

Como I é centrado em $\varepsilon \Rightarrow x_{i+1} \in I$.

Prova...

<u>Parte 2</u> $\lim_{i\to\infty} |x_i - \xi| = 0$

Analogamente a (b), temos:

$|x_i - \xi| \leq K|x_{i-1} - \xi|,$

$|x_{i-1} - \xi| \leq K|x_{i-2} - \xi|, \ldots$

Logo: $|x_i - \xi| \leq K^i |x_0 - \xi|.$

fazendo limite dos dois lados

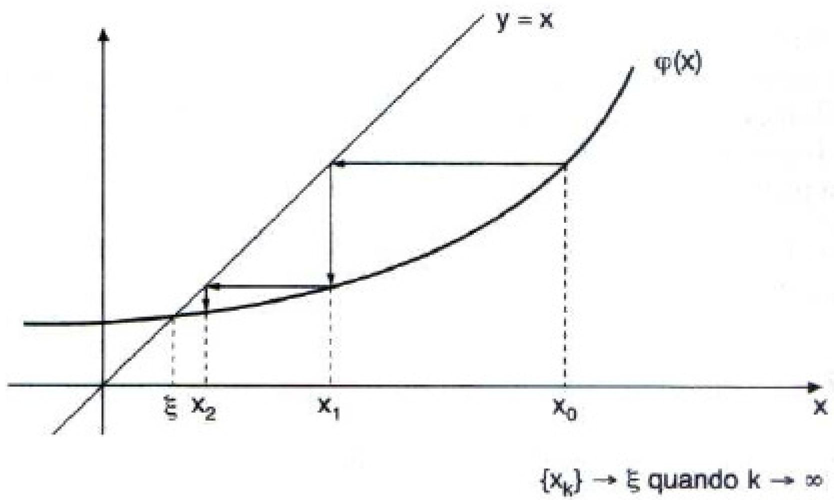
$$\lim_{i\to\infty} |x_i - \xi| \leq \lim_{i\to\infty} K^i |x_0 - \xi|$$

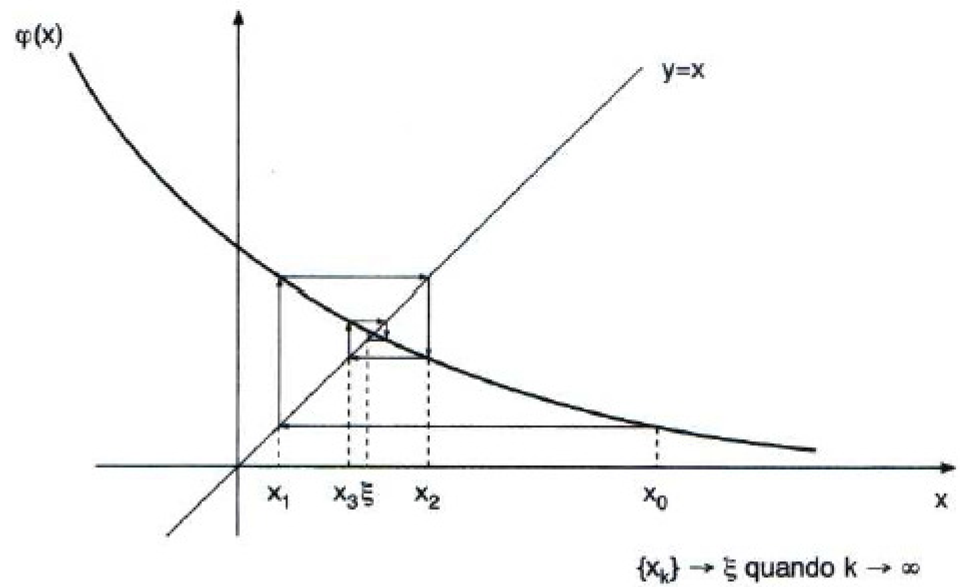
como $K < 1$

$$\lim_{i\to\infty} K^i |x_0 - \xi| = 0 \Rightarrow \underline{\lim_{i\to\infty} |x_i - \xi| = 0}$$

Graficamente

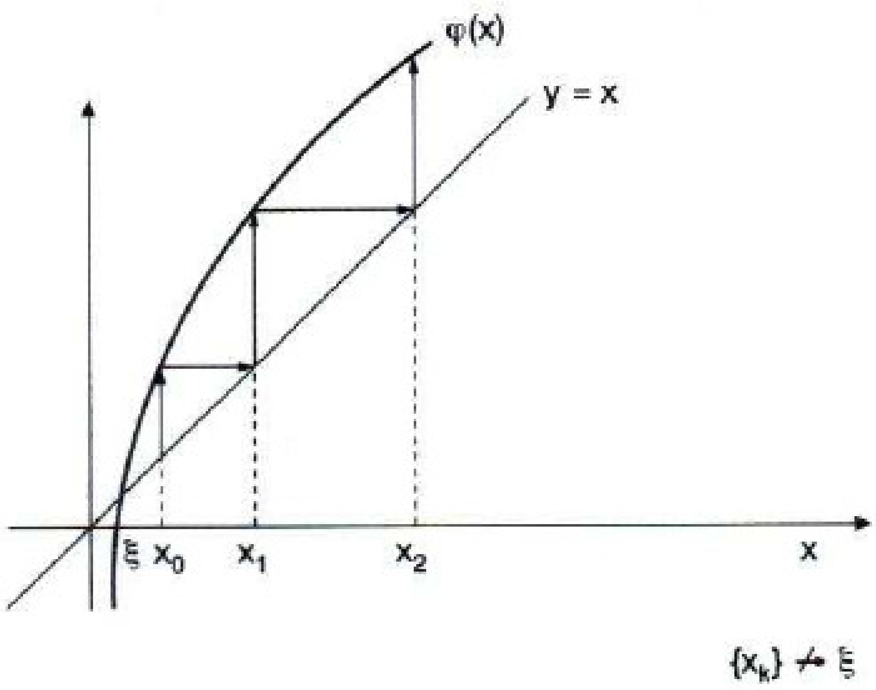
- Convergência...

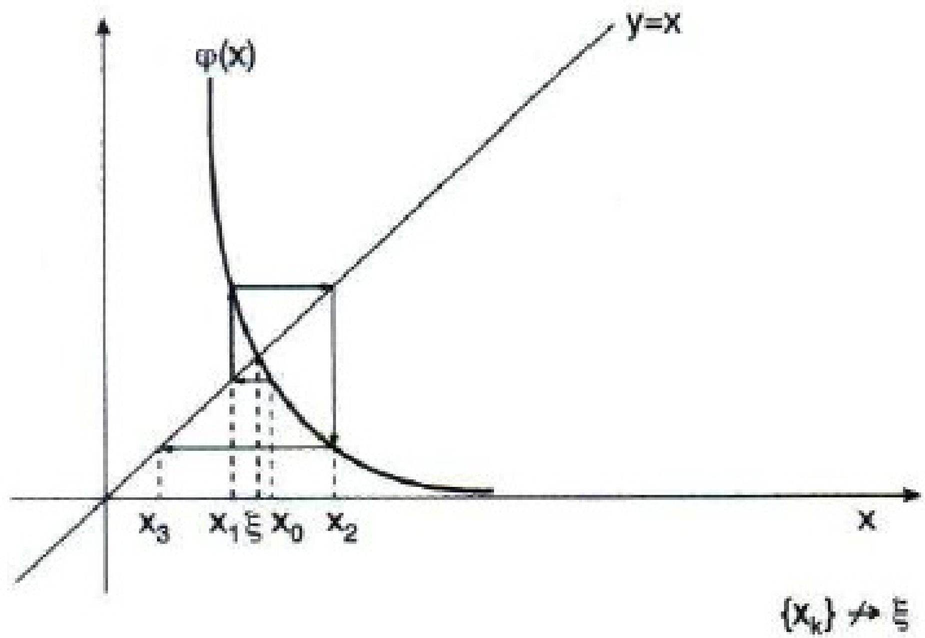




Graficamente

- Não-convergência





Voltando ao exemplo 2

- Analisando condições de convergência:

1. $\boldsymbol{\varphi}(x) = 6 - x^2$

- $\boldsymbol{\varphi}'(x) = 2x$
- $\boldsymbol{\varphi}(x)\ \boldsymbol{e}\ \boldsymbol{\varphi}'^{(x)}\boldsymbol{são\ continuas\ em\ R}$
- $|\boldsymbol{\varphi}'(\boldsymbol{x})| < \mathbf{1} \leftrightarrow |\mathbf{2}\boldsymbol{x}| < \mathbf{1} \leftrightarrow -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} < \boldsymbol{x} < \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$
  - Não existe um intervalo I centrado em x=2, tal que $|\boldsymbol{\varphi}'(\boldsymbol{x})| < \mathbf{1}$, pois essa condição só é satisfeita entre (-1/2 e 1/2).
  - Logo, a condição de convergência não foi satisfeita!

Voltando ao exemplo 1

- Analisando condições de convergência:

1. $\varphi(x) = \sqrt{6 - x}$

- $\boldsymbol{\varphi'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{6-x}}}$
- $\varphi(x)$ é contínua em $\boldsymbol{S = \{x \in R | x \leq 6\}}$
- $\varphi'(x)$ é contínua em $\boldsymbol{S = \{x \in R | x < 6\}}$
- $\boldsymbol{|\varphi'(x)| < 1 \leftrightarrow \left|\frac{1}{2\sqrt{6-x}} < 1\right| \leftrightarrow x < 5.75}$
  - Condições de convergência satisfeitas para $\boldsymbol{x_0 < 5.75}$

Exemplo 3

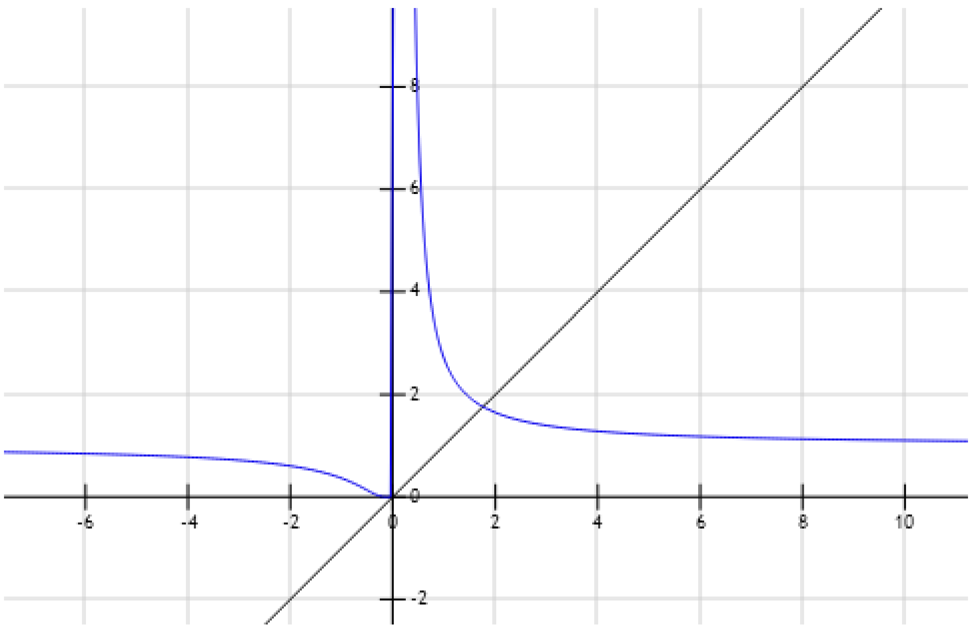
- Determinar, utilizando o MIL, o valor aproximado da menor raiz real positiva de:
  - $f(x) = x\ln(x) - 1$
- Graficamente, temos que $\xi \in [\,1{,}7\,;\,1{,}8\,] = \mathbf{I}$
- Logo, x_0=1,75

$$ln\ \boldsymbol{x} = \frac{1}{x} \quad \text{ou} \quad \boldsymbol{x} = e^{1/x} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})$$

Como $\boldsymbol{\varphi}'(\boldsymbol{x}) = -\dfrac{e^{1/x}}{x^2}$, verifica-se sem maiores problemas que $\boldsymbol{\varphi}$ e $\boldsymbol{\varphi}'$ são contínuas em $\mathbf{I}$. Por outro lado, temos $|\,\boldsymbol{\varphi}'(\boldsymbol{x})\,| < 1, \forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbf{I}$.

Exemplo 3

- Logo, podemos aplicar o método:
  - $x_{i+1} = \varphi(\mathrm{x_i}), \mathrm{i} = 0, 1, 2 \ldots$



Iteração i	x_i
0	1,75
1	1,77079
2	1,75895
3	1,76565
4	1,76185
5	1,76400
6	1,76578
7	1,76347
8	1,76308
9	1,76330
10	1,76318
11	1,76325
12	1,76321
13	1,76323
14	1,76322
15	1,76323
16	1,76322

Pergunta...

- O Método Iterativo Linear determina as condições para a definição da função $\boldsymbol{\varphi}(x)$, mas não apresenta a função propriamente dita.

- Como poderíamos definir $\boldsymbol{\varphi}(x)$ de forma que as condições apresentadas fossem sempre satisfeitas?

Método de Newton-Raphson

Método de Newton-Raphson

- Nem sempre é simples determinar uma função de iteração que satisfaça as condições do Método Iterativo Linear

i) $\varphi(x)$ e $\varphi'(x)$ são contínuas em I,

ii) $|\varphi'(x)| \leq M < 1, \forall x \in I$ e

iii) $x_0 \in I$,

- Idéia método de Newton
  - **Construir uma função de iteração φ, tal que** $\varphi'(\varepsilon) = 0$

Método de Newton-Raphson

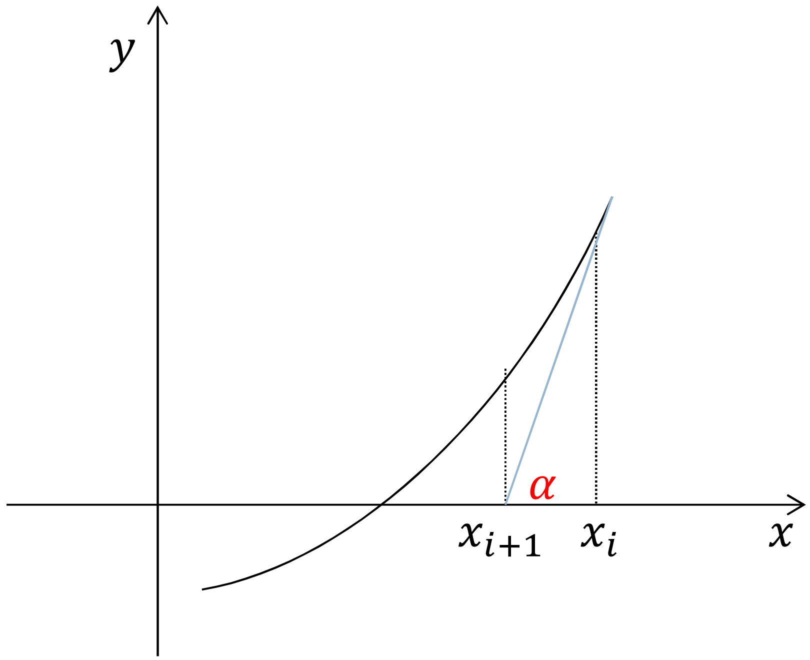
- Partindo da forma geral:
- $\boldsymbol{\varphi}(x) = x + a(x)f(x),\ a(x)\ e\ f'(x) \neq 0, \forall x \in I$
- $\boldsymbol{\varphi}'(\varepsilon) = 1 + a(\varepsilon)f'(\varepsilon) + a'(\varepsilon).f(\varepsilon)$
- **Impondo que $\boldsymbol{\varphi}'(\varepsilon) = 0$, e sabendo que $\boldsymbol{f}(\varepsilon) = \mathbf{0}$, já que ε é a raiz procurada, temos que**
- $\boldsymbol{a}(\varepsilon) = -\dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{f}'(\varepsilon)}$
- **Retornando à forma geral, teremos que**
- $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - \dfrac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})}$
- **O que nos leva ao seguinte processo iterativo**
- $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x_i}) = \boldsymbol{x_{i+1}} = \boldsymbol{x_i} - \dfrac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_i})}{\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x_i})}$

Método de Newton-Raphson

- Convergência do método de newton
  - **Caso $x_0 \in I$, a sequência $\{x_k\}$ gerada pelo processo iterativo $x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$ converge para a raíz**
  - **Em geral, afirma-se que o método de Newton converge desde que x_0 seja escolhido "suficientemente próximo" da raíz**

Método de Newton-Raphson

- Interpretação geométrica



$$tg\alpha = {f(x_i)}\big/{(x_i - x_{i+1})}$$

$$f'(x_i) = {f(x_i)}\big/{(x_i - x_{i+1})}$$

$$x_i - x_{i+1} = {f(x_i)}\big/{f'(x_i)}$$

$$\boxed{x_{i+1} = x_i - {f(x_i)}\big/{f'(x_i)}}$$

Método de Newton-Raphson

- Exercício para sala:
- **Dada a equação $f(x) = x^3 - 9x + 3$, encontre a raíz dentro do intervalo [0,1]. Execute o método até que $|x_{i+1} - x_i| < 10^{-2}$**
  - $f'(x) = 3x^2 - 9$
  - $x_{k+1} = x_k - {f(x_k)}/{f'(x_k)} = x_k - {(x_k^3 - 9x_k + 3)}/{(3x_k^2 - 9)}$
  - **Assim:**
  - $x_1 = 0,5 - {(0,5^3 - 9.0,5 + 3)}/{3.0,5^2 - 9} = 0.3333$
  - $x_2 = x_1 - {(x_1^3 - 9x_1 + 3)}/{(3x_1^2 - 9)} = 0.3376$
  - $f(x_2) \cong 1,834.10^{-5}$ **e já pode ser considerada uma precisão aceitável.**
  - **Solução:** $x' = x_2 = 0.3376$

Referências

- [1] Silva, Zanoni; Santos, José Dias. Métodos Numéricos, 3ª Edição. Universitária, Recife, 2010.
- [2] Ruggiero, Márcia; Lopes, Vera. Cálculo Numérico – Aspectos Teóricos e Computacionais, 2ª Edição. Pearson. São Paulo, 1996.
- [3] Teorema do Valor Médio: https://www.youtube.com/watch?v=Da84AXj2rvA